三次多項式函數圖形的平移

三次多項式函數 $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$ 經過平移可以型如函數 $g(x)=x^3+px$。當然，

函數 $g(x)=x^3+px$ 經過平移可得函數 $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$。

1. x^3+ax^2+bx+c 配三方

$$\because (x+\frac{a}{3})^3 = x^3+ax^2+\frac{a^2}{3}x+\frac{a^3}{27}$$

$$\therefore x^3+ax^2+bx+c=$$

$$=(x+\frac{a}{3})^3-\frac{a^2}{3}x-\frac{a^3}{27}+bx+c$$

$$=(x+\frac{a}{3})^3-\frac{a^2}{3}(x+\frac{a}{3})+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{27}+b(x+\frac{a}{3})-\frac{ab}{3}+c$$

$$=(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})(x+\frac{a}{3})+(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27})$$

2. x^3+ax^2+bx+c 以 $-\frac{a}{3}$ 為參考點的的泰勒形式

令 $f(x)= x^3+ax^2+bx+c$，則 $f(-\frac{a}{3})=\frac{2a^2}{27}-\frac{ab}{3}+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$, 則 $f'(-\frac{a}{3})=b-\frac{a^2}{3}$

$f''(x)=6x+2a$, 則 $f''(-\frac{a}{3})=0$

$f'''(x)=6$, 則 $f'''(-\frac{a}{3})=6$

因此 x^3+ax^2+bx+c 以 $-\frac{a}{3}$ 為參考點的的泰勒形式如下

$$\frac{f'''(-\frac{a}{3})}{3!}(x+\frac{a}{3})^3+\frac{f''(-\frac{a}{3})}{2!}(x+\frac{a}{3})^2+\frac{f'(-\frac{a}{3})}{1!}(x+\frac{a}{3})+f(-\frac{a}{3})=$$

$$=(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})(x+\frac{a}{3})+(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27})$$

由上述可知，將 $f(x)=x^3+(b-\frac{a^2}{3})x$ 的圖形平移，

(1)如果 $-\frac{a}{3}>0$，則向右平移 $-\frac{a}{3}$ 單位長。

(2)如果 $-\frac{a}{3}<0$，則向左平移 $\frac{a}{3}$ 單位長。

(3)如果 $c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}>0$，則向上平移 $(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27})$ 單位長。

(4)如果 $c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}<0$，則向下平移 $|c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27}|$ 單位長。

平移後所得新位置的圖形就是 $(x+\frac{a}{3})^3+(b-\frac{a^2}{3})(x+\frac{a}{3})+(c-\frac{ab}{3}+\frac{2a^3}{27})$ 的圖形，

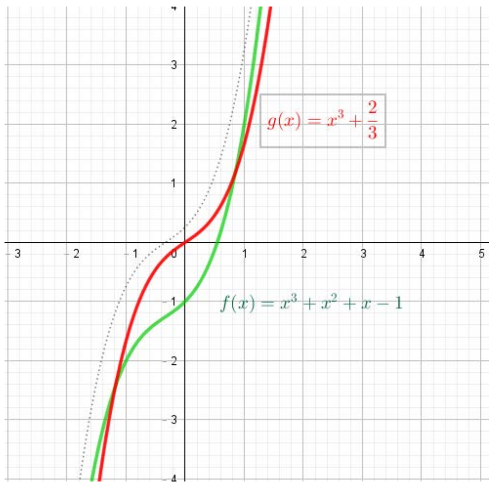
即 x^3+ax^2+bx+c 的圖形。

結論：

已知三次多項式函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且 $f''(\alpha)=0$ ，那麼只需平移

$g(x)=x^3+f'(\alpha)x$ 的函數圖形，向右平移 α 單位長，向上平移 $f(\alpha)$ 單位長 ，就可以得到 $f(x)$ 的函數圖形。

例題：



三次函數 $f(x)=x^3+x^2+x-1$，

$f'(x)=3x^2+2x+1$ ，$f''(x)=6x+2$ 。

令 $f''(x)=6x+2=0$，得 $x=-\frac{1}{3}$，則

$f(-\frac{1}{3})=-\frac{34}{27}$ 且 $f'(-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$ 。

因此 平移三次函數

$g(x)=x^3+f'(-\frac{1}{3})x=x^3+\frac{2}{3}x$ 的圖形，向右平移 $-\frac{1}{3}$ 單位長(即向左平移 $\frac{1}{3}$ 單位長)； 向上平移 $-\frac{34}{27}$ 單位長(即向下平移 $-\frac{34}{27}$ 單位長)，可以得函數 $f(x)$ 的圖形。

相關資源:
三次多項式函數圖形的平移的 ggb 檔 (可以操作試驗)
http://www.mathland.idv.tw/ggb/ggbhtml5/cubic_polynomial_translation.htm

李信昌(昌爸)2019

昌爸工作坊 http://www.mathland.idv.tw